Números complejos

En la resolución de cualquier operación matemática, podemos hallar un resultado como este: $\sqrt{-4}$. No podemos encontrar una interpretación a este resultado ya que no existe ningún número que elevado al cuadrado dé -4.

Ahora bien; si hacemos un pequeño truco y desglosamos la raíz en dos,

$\sqrt{-4} = \sqrt{-1} \times \sqrt{4}$

la solución sería $2\sqrt{-1}$. Que sigue sin tener como solución un número real.

Bueno. Ahora, hagamos un cambio:

Vamos a llamar a $\sqrt{-1}$ con la letra "j" y entonces tendremos que $\sqrt{-4} = 2j$

A esta letra "j", equivalente a $\sqrt{-1}$, la llamaremos unidad imaginaria. En otros ámbitos esta letra se cambia por "i". Nosotros utilizaremos siempre la denominación "j". Debemos observar que "j" es un multiplicador que afecta al número que acompaña. En el ejemplo anterior, "j" multiplica a 2 (2j)

De esta manera el campo de los números en general lo podemos definir en un eje de coordenadas XY en el que el eje de abscisas corresponda a los números reales y el de ordenadas a los imaginarios.

A partir de aquí deberemos considerar a cualquier número como un ente complejo capaz de contener una parte real y otra imaginaria y representarlo en campo complejo de coordenadas como se ve en la figura 1

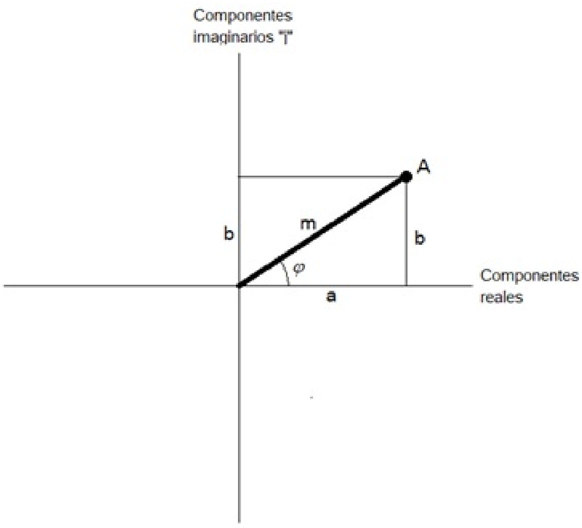

Figura 1

Según esta figura, definiremos al número complejo;

cuyo afijo será A.

Su módulo será " m ",

su argumento o ángulo de fase, será φ

tendrá una componente imaginaria, en este caso positiva, que será " b " y otra componente real, también positiva, que será " a ".

Como hemos visto antes, un número imaginario puro, será el producto de un número real por la unidad imaginaria " j ". En el ejemplo anterior, 2j es un número imaginario puro y lo representaríamos en el eje imaginario de la figura 1

En general, un número complejo, se puede expresar como la suma vectorial (Nota) de sus componentes real e imaginaria tal como se desprende de la figura 1

Las relaciones entre los distintos componentes del número complejo, tal como vimos en la resolución del triángulo rectángulo, vienen dadas por,

Recordando a Pitágoras que decía que el cuadrado de la hipotenusa (en este caso es "m") es igual a la suma de los cuadrados de los catetos y despejando "m", $m = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$$

$$a = m \times \cos \varphi$$

$$b = m \times sen\varphi$$

En la figura 2 observamos los semiejes del campo complejo y determinamos su signo.

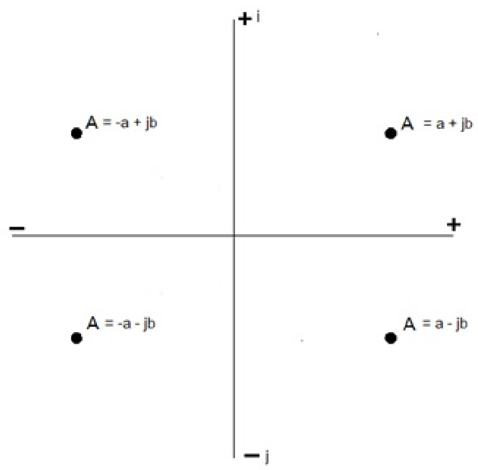

Figura 2

En el semieje horizontal derecho representaremos los números reales positivos

En el semieje horizontal izquierdo representaremos los números reales negativos

En el semieje superior, representaremos los valores imaginarios positivos y, en el semieje inferior representaremos los valores imaginarios negativos. Se ve que es de vital importancia tener en cuenta estos signos para determinar correctamente la posición del afijo complejo y su ángulo de fase o argumento.

Un número complejo se puede expresar de distintas formas:

- *Cartesiana*., mediante la expresión (a, b) en la que “ a “ es valor real y “ b “ el imaginario
- *Algebraica o binómica* mediante la expresión $(a \pm jb)$ Es la expresión más común
- *Trigonométrica o polar* mediante la expresión $m(\cos\varphi \pm jsen\varphi)$
- *Exponencial* o Fórmula de Euler mediante la expresión $m \times e^{j\varphi}$ (m = módulo y $e^{j\varphi}$ argumento o ángulo de fase
- *Módulo-argumental* mediante la expresión $m_{\underline{|\varphi}}$ (m es el módulo y φ el argumento o ángulo de fase)

Cualquier número es un complejo. Cuando sólo disponemos de un número real, su componente imaginario es cero.

Los números complejos se pueden operar como los números reales (suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces) pero sus métodos los obviaremos porque no es mi propósito extenderme más de lo necesario.

Bien. Conocido el concepto de número complejo, vamos a aplicarlo a algunas denominaciones que manejamos en el estudio de las antenas.

Impedancia de entrada a una línea de transmisión o una antena.

El concepto de impedancia consiste en la expresión de la resistencia que opone una carga cuando se le suministra energía de corriente alterna.

En estas circunstancias, cualquier “resistencia” tiene dos componentes:

Resistencia propiamente dicha en la que se consume o aprovecha determinada parte de la energía suministrada y

Reactancia, que si está presente en el circuito, almacena y libera alternativamente en forma de campo eléctrico o magnético parte de la energía en detrimento de la utilizada por la resistencia propiamente dicha.

Existirá reactancia si en el circuito hay presencia de una inductancia o una capacidad.

La resistencia se representa por una “R” y la reactancia por una “X”, y se suman de manera vectorial como un número complejo. Así, la Impedancia en general se representa por:

$$Z = R \pm jX$$

El signo de jX dependerá de que la reactancia sea producida por una inductancia (positiva) o por una capacidad (negativa)

La resistencia total (Impedancia) será la combinación de R y X que se suman vectorialmente. Esto es:

Dado que la impedancia es un número complejo, R (real) y X (imaginaria) junto con Z (módulo de la impedancia) forma un triángulo rectángulo que se resuelve de la manera que ya conocemos.

Si en un circuito, existen simultáneamente reactancia inductiva y capacitiva, la reactancia resultante será la suma aritmética de las dos y el signo será el de la mayor.

La disposición en el plano complejos de estos tres conceptos (Z, R y X), se ve en la figura 3

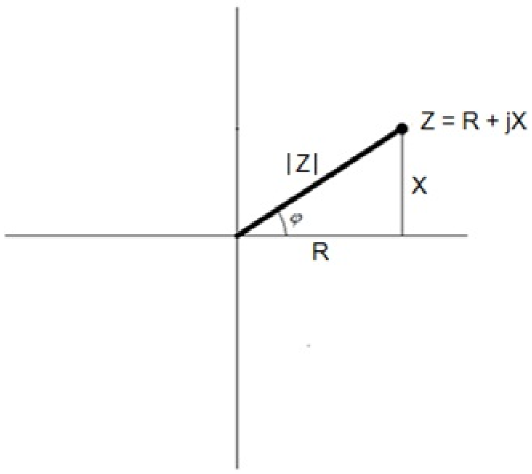

Figura. 3

El módulo de la impedancia se representa como $|Z|$, Cuando X vale cero, no hay reactancia y φ vale cero. Sólo hay resistencia pura (resonancia). En esta figura, dado que X está en el semiplano superior, es de signo positivo y por lo tanto corresponde a una reactancia inductiva.

Bueno. Este es el final de los tres artículos en los que he intentado fijar los conceptos básicos de las tres disciplinas matemáticas indispensables para entender algo de este mundo de expresiones técnicas en la descripción de las antenas y líneas de transmisión.

NOTA.- Como recordatorio definiremos un vector como una línea que puede expresar, una longitud, una fuerza, un movimiento, una potencia y cuantos otros conceptos en los que se puedan ver claramente representados por el dibujo de una flecha.

En la figura 4 se representa un vector de dirección horizontal, sentido hacia la derecha y magnitud, la que represente la longitud y escala del mismo.

Figura 4

La suma y resta de los vectores son de carácter geométrico ya que además de la magnitud propiamente dicha se tienen en cuenta sus direcciones y sentidos. Es un tema que da lugar a otro capítulo que no trataremos aquí.

Armando Garcia

EA5ND