<u>LOGARITMOS (y unidades logarítmicas)</u>

Hablemos primero de los sistemas de numeración que se emplean en las distintas disciplinas de cálculo de la humanidad.

Vamos a definir qué es un sistema de numeración

Es un conjunto de símbolos y reglas **que** nos permiten escribir e interpretar una cantidad, un número. ... Este **sistema** permit la repetición de los símbolos **para** formar la cantidad requerida.

Se llama sistema posicional cuando el valor de cada símbolo depende de su posición en el conjunto. Veamos un ejemplo.

1234**5**

El símbolo 5 tiene estrictamente su valor porque su posición es la de las unidades

Sin embargo, en 12**5**79, su valor es de 500 porque ocupa la posición de las centenas.

Los sistemas de numeración más usados, son

Decimal (símbolos de 0 a 9) de todos conocidos, Su base es 10 (diez)

Binario (símbolos 0 y 1). Su base es 2

Octal (símbolos de 0 a 7). Su base es 8

Hexadecimal (Símbolos de 0 a 9 más A, B, C, D, E, y F). Su base es 16

El sistema decimal se emplea en todas las actividades de cálculo en general, como es suficientemente sabido.

Los sistemas, binario, octal y hexadecimal se emplean en el mundo de la informática.

Existe otra base de numeración (que no es un sistema pues solo tiene un símbolo) que es el número “e”.

Este número al igual que pi, es una constante irracional (de infinitos números decimales).

Su valor es 2’71 82 81 82 84 ………….

Su símbolo es “e”

Es un número importante ya que aparece en numerosos cálculos como son:

Estadística

Curvas catenarias

Datación de fósiles,

Evolución de poblaciones, enfermedades etc.

Interés compuesto

Desintegración radioactiva, etc.

Bien. Conocidas las bases de numeración utilizadas en los distintos ámbitos del cálculo matemático, definamos el concepto de LOGARITMO.

Una definición de ámbito general, seria:

El logaritmo de un número N es el exponente L al que se debe elevar su base de numeración B, para obtener dicho número N,

Así, podemos decir:

$$N = B^L$$

Solamente utilizamos dos bases de numeración: La decimal y la natural o neperiana (en honor a su descubridor John Napier).

De esta manera, sólo trabajaremos con:

"Logaritmos decimales" representados por "log_{10}", "log" o simplemente "lg", "logaritmos neperianos o naturales" representados por "ln" o "L"

Veamos unos ejemplos:

$$\log 2 = 10^{0'301030}$$

$$\ln 2 = e^{0'639147}$$

Los valores de estos logaritmos se encontraban en tiempos anteriores, en tablas calculadas al efecto. En la actualidad suponen una tecla en una calculadora científica, lo que simplifica sobremanera, la tarea.

Un logaritmo es una herramienta que simplifica en gran manera las tareas del cálculo.

Por ejemplo, calcular la raíz 7ª de un número sería un proceso harto complicado, así como elevar un número a una potencia con decimales. El empleo de los logaritmos, rebaja un grado la categoría de las operaciones matemáticas, así, un producto, se convierte en una simple suma, una división en una resta, una potencia en una multiplicación y una raíz en una división.

Veamos unos cuantos ejemplos en base 10:

$$\log\left(\sqrt[7]{23}\right) = \frac{\log 23}{7} \qquad \log\left(45^{2'345}\right) = 2'345 \times \log 45$$

$$\log(23 \times 45) = \log 23 + \log 45$$

$$\log\left(\frac{45}{23}\right) = \log 45 - \log 23$$

En la operación inversa (hallar el número a partir de su logaritmo), si **L** es el logaritmo de un número **N** en una base de numeración **B,** se dice que N es el antilogaritmo de L y es igual a la base B elevada a L

Antilog $L = B^{L} = N$

Ejemplo práctico:

El logaritmo decimal de 2 es 0'301030. Entonces, decimos que 2 es el antilogaritmo de 0'301030 ya que

$$2 = 10^{0'301030}$$

En una calculadora científica, hallaríamos el antilogaritmo de 0'301030 valiéndonos de la tecla 10^{x} que nos daría como resultado 2.

En cualquiera de los ejemplos anteriores de simplificación de operaciones y tomando como ejemplo la raíz 7ª de 23, una vez resuelta la división del log de 23 entre 7, debemos hallar el antilogaritmo para determinar el número que supone la solución a esta raíz. Este procedimiento sirve igual para el resto de ejemplos.

Existe una correspondencia entre los logaritmos decimal y neperianos de tal manera que, si a un logaritmo neperiano lo multiplicamos por 0'434294, obtenemos el logaritmo decimal. Por el contrario, si a un logaritmo decimal, lo multiplicamos por 2'303589, obtenemos el logaritmo neperiano.

Por último, veamos la utilidad del empleo de esta herramienta.

Vamos a contemplar las unidades logarítmicas empleadas en el mundo de las telecomunicaciones:

La unidad básica utilizada en el mundo de las telecomunicaciones y también en acústica, iluminación, es el logaritmo de una unidad que relaciona dos cantidades de la misma dimensión o naturaleza.

Dicho logaritmo recibe el nombre de Belio aunque comúnmente se emplea su decimal "decibelio" ya que el Belio resulta demasiado grande y por lo tanto, poco práctico. La abreviatura del decibelio es "dB". Se deduce que 1 Bel =10 dB.

El motivo de emplear unidades logarítmicas en lugar de lineales se debe a que el objetivo final de las señales tratadas, es la excitación de algún sentido corporal (vista, oído ….) y los sentidos corporales no se comportan de forma lineal sino prácticamente siguiendo una pauta logarítmica. Así lo establece la ley de Weber-Fechner cuyo enunciado dice que *la sensación crece con el logaritmo del estímulo.*

Para aclarar este concepto, veamos un caso práctico.

Supongamos que escuchamos música con un nivel de sonido N (sensación), producido por un amplificador que suministra una potencia P (estímulo) de 50 watios .

Si aumentamos la potencia al doble (multiplicando por 2 el estímulo), o sea, 100 watios, nuestra sensación de aumento del sonido crecerá con el logaritmo de 2 , o sea , 0'301030 veces

Ahora deseamos oír la música "el doble de fuerte"

Según la ley citada, para que oigamos el doble de fuerte, la potencia del amplificador deberá aumentar una cantidad tal, que su logaritmo sea 2, o sea, log de la variación de potencia = 2. Luego la variación será = 100 por lo que la potencia de salida del amplificador deberá ser 50 x 100 = 5000 watios.

En el caso del sonido, quiero observar que en todos los aparatos electrónicos que tratan el sonido, los potenciómetros que ajustan el nivel del mismo, la variación de su resistencia es logarítmica.

Debido al comportamiento de los sentidos corporales, utilizaremos el Belio para relacionar potencias eléctricas o intensidades de sonido.

En nuestro caso, sólo consideraremos las relaciones de magnitudes eléctricas.

Si a partir de una potencia P_1, obtenemos otra potencia mayor P_2, mediante una amplificación, su relación expresada en Belios, será

nº de Belios = $\log \frac{P_2}{P_1}$ o en decibelios, nº de dB = $10 \log \frac{P_2}{P_1}$

Como hemos dicho antes, a partir de ahora utilizaremos el decibelio.

Si P_2 es mayor que P_1 estaremos ante una ganancia de potencia. En caso contrario, estaremos ante una pérdida o atenuación y el nº de dB tendrá signo negativo

Cuando utilizamos a P_1 como unidad de referencia, el nº de dB nos expresa un valor absoluto de P_2 en dB. Así si referimos P_1 a 1 milivatio (para potencia pequeñas) obtendremos P_2 como valor absoluto de potencia en milivatios expresada en unidades logarítmicas como "dBm" (la "m" final nos indica la referencia, milivatios). Para grandes potencias se suele utilizar la referencia a 1 vatio y P_2 vendrá expresada en "dBW".

Por ejemplo, 20 mw equivalen a 10 log 20 = 13 dBm; 100 vatios, serán 10 log 100 = 20 dBW y en dBm valdrán 10 log 100.000 = 50 dBm

La ventaja de expresar las potencias absolutas en dBm (o dBW) y no en mW ó W, es la facilidad de operación con ellas. Una ganancia o pérdida entre dos potencias expresadas en vatios se halla con una división. Expresadas en dBm o dBW, simplemente se resta. Así, por ejemplo, se dice que un amplificador gana 20 dB y no se dice que amplifica 100 veces. Una potencia de entrada de 4 dBm en el amplificador anterior, supone a la salida una potencia de 24 (4dBm+20 dB) dBm.

Si expresamos estas potencias en función de la tensiones que representan asumiendo que las impedancias Z en las que se disipan son iguales, vemos que:

$$nº dB = 20\, log \frac{V_2}{V_1}$$

En este caso el valor absoluto de V_2 referenciado a V_1 = 1 voltio es dBV. Para pequeñas tensiones, como es el caso de las obtenidas en bornes de las antenas receptoras, la referencia es a V_1 = 1μV y se expresa como dBμV

El mismo razonamiento aplicaremos cuando consideremos las intensidades derivadas de estas potencias y obtendremos

$$n^{o}\, dB = 20 \log \frac{I_2}{I_1}$$

Además de estas unidades logarítmicas, se emplea otra en que las relaciones se expresan en logaritmos neperianos y no decimales como en el caso del Belio.

En este caso, la unidad utilizada es el “neper” o “neperio”(en algunas literaturas). El neper se define simplemente como el logaritmo neperiano de dos tensiones. Así,

$$n^{o}\, neper = \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Los neper no se utilizan para expresar valores absolutos como en el caso anterior y su relación con los decibelios (expresados como tensiones) es la siguiente.

1 neper = 8’68588 dB.

Bien. En el siguiente artículo, hablaremos de número complejos.

Armando García

EA5ND